Injections

f est injective de E dans F si $\quad \forall (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Mot clef à retenir : « au plus »

- Les éléments de l'ensemble d'arrivée admettent *au plus* un seul antécédent.
- $\forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x, admet *au plus* une solution dans E.
- Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, les droites horizontales coupent *au plus* une fois la courbe de f.

Méthode pour montrer que f est injective.

Cas général	$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$
♠ « Soit $y \in F$ **quelconque**, » on résout $f(x) = y$ d'inconnue x et on trouve *au plus* une solution $x \in E$. *ou* « Soient $(x,x') \in E$, on suppose $f(x) = f(x')$ $\vdots$ alors $x = x'$. » *ou* « Soient $(x,x') \in E$, on suppose $x \neq x'$ $\vdots$ alors $f(x) \neq f(x')$. »	« f est strictement monotone. » (suffisant, mais pas nécessaire)

Méthode pour montrer que f n'est pas injective.

On cherche $x \neq x'$ tel que $f(x) = f(x')$ *ou* à l'aide du tableau de variation.

Surjections

f est surjective de E sur F $\begin{cases} \textit{si} & \forall y \in F,\ \exists x \in E,\ \text{tel que } f(x) = y. \\ \textit{ou si} & f(E) = F \end{cases}$

Mot clef à retenir : « au moins »

- Les éléments de l'ensemble d'arrivée admettent tous *au moins* un antécédent.
- $\forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x, admet *au moins* une solution dans E.
- Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, toutes les droites horizontales coupent *au moins* une fois la courbe de f.

Méthode pour montrer que f est surjective.

Cas général	$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$
♠ « Soit $y \in F$ **quelconque**, » on résout $f(x) = y$ d'inconnue x et on trouve *au moins* une solution $x \in E$.	Si f est continue : $\boxed{\text{Théorème des valeurs intermédiaires}}$
ou on montre que $F \subset f(E)$.	Utilisation des limites et du tableau de variations.

Méthode pour montrer que f n'est pas surjective.
On cherche un $y \in F$ sans antécédent, c'est-à-dire tel que $\forall x \in E, f(x) \neq y$.
ou
à l'aide du tableau de variation, par exemple si la fonction est majorée ou minorée.

Bijections

f est bijective de E sur F $\begin{cases} \textit{si} & \forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ \text{tel que } f(x) = y \\ \textit{ou si} & f \text{ est injective } \textbf{et} \text{ surjective.} \\ \textit{ou si} & f \text{ admet une application réciproque.} \end{cases}$

Mot clef à retenir : « exactement un »

- Les éléments de l'ensemble d'arrivée admettent tous *exactement un* antécédent.
- $\forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet *exactement une* solution dans E.
- Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, toutes les droites horizontales coupent *exactement une* fois la courbe de f.

Méthode pour montrer que f est bijective.

Cas général	$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$
♠ « Soit $y \in F$, **quelconque** », on résout $f(x) = y$ d'inconnue x et on trouve exactement une solution $x \in E$ $\to$ *donne* f^{-1} *en même temps.* *ou* f est injective et surjective *ou* On trouve une application g telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ **et** $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ $\to$ *donne en même temps :* $g = f^{-1}$.	Si f est continue et strictement monotone[1]. $\boxed{\text{Théorème de la bijection continue}}$

Méthode pour montrer que f n'est pas bijective.
On montre qu'elle n'est pas injective ou pas surjective.

1. Le théorème de la bijection continue est le théorème des valeurs intermédiaires (donne la surjectivité) avec l'ajout de l'hypothèse de stricte monotonie (injectivité).
Ce théorème est parfois appelé « corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ».