Vademecum sur l'étude des fonctions

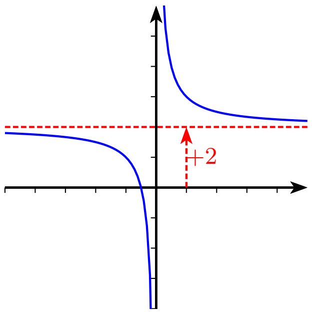
Méthode

Lorsque l'on étudie une fonction, on répond aux questions (dans l'ordre) :

1. **Domaine de définition** de la fonction, éventuellement domaine de continuité, dérivabilité...
2. **Réduction du domaine d'étude**
3. **Variations :**
   On étudie les variations de la fonction, on repère les éventuelles tangentes horizontales.
   On calcule les valeurs de f aux points remarquables.
4. **Limites et asymptotes** aux bords du domaine de définition.
5. **Tracer le graphe :** lorsque c'est possible, on trace le graphe de la fonction. N'oubliez pas les asymptotes, points et tangentes remarquables...

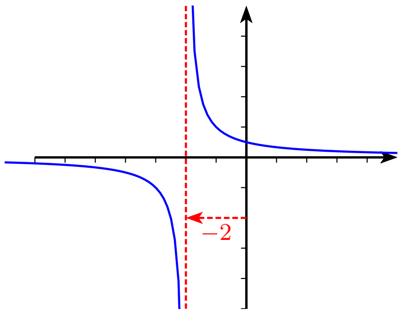
A Translation des graphes

Translation verticale



Exemple :
La courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x} + 2$ est la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ translatée de $+2$ vers le haut.

Translation horizontale



Exemple :
La courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ est la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ translatée de -2 horizontalement.

B Continuité

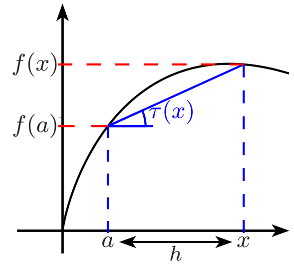
f est continue en a si $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$

Théorème des valeurs intermédiaires
Si f est continue sur un intervalle I contenant $[a, b]$.
Alors f prend toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$.
Autre formulation : L'image d'un intervalle par une application continue (à valeurs réelles) est un intervalle.

Théorème de la bijection continue
Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle et f est bijective de I dans $f(I)$.
De plus, f^{-1} est elle-même continue, strictement monotone et de même monotonie que f.

Théorème des bornes atteintes
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : elle possède un maximum et un minimum.
Autre formulation : L'image d'un segment par une application continue est un segment.

C Dérivabilité



Le **taux d'accroissement** de f en a est défini par

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

il désigne la pente entre les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.

- f est dérivable en a si $\tau_a(x)$ a une limite finie quand $x \to a$,

  $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

  (on a posé $h = x - a$)

  Dans ce cas, la courbe admet une **tangente** au point a dont la pente est $f'(a)$:

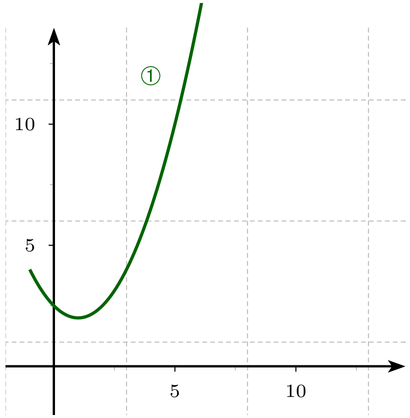
  $$T_a \ : \ y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

  – si $f'(a) = 0$: tangente horizontale.
  – si $f'(a) > 0$: tangente de pente positive (fonction croissante).
  – si $f'(a) < 0$: tangente de pente négative (fonction décroissante).

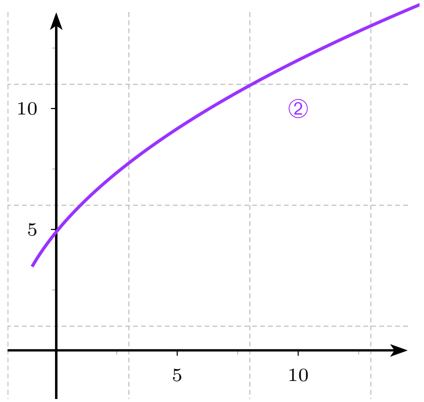
- Si le taux d'accroissement admet une limite infinie, alors f n'est pas dérivable en a et la courbe admet une tangente verticale en a.

  (dirigée vers le haut ou vers le bas suivant le signe de la dérivée)

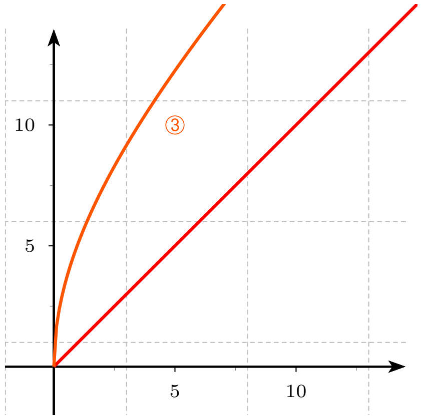
D Branches asymptotiques



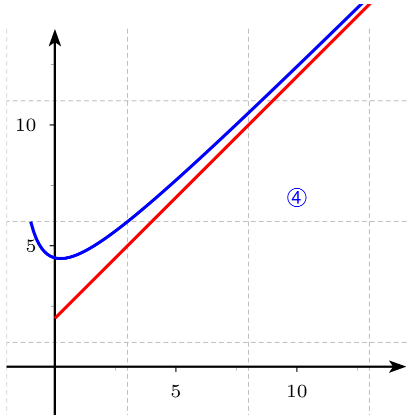
branche parabolique de direction verticale



branche parabolique de direction horizontale



branche parabolique de direction $y = ax$



asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

Nature des branches en $+\infty$

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = \ell$ au voisinage de $+\infty$.
- si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$,
  - ① si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
  - ② si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
  - si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}^*$,
    - ③ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$.
    - ④ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbf{R}$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

Dans les autres cas on ne peut pas conclure.

Position par rapport à une asymptote :

Lorsque la courbe admet une asymptote horizontale ou oblique, on peut déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote $y = ax + b$ en étudiant le signe de la différence.