

ENSEMBLES

Égalité d'ensembles	$E = F$	E et F ont exactement les mêmes éléments. $E = F \iff \forall x (x \in E \iff x \in F)$
Inclusion	$E \subset F$	Tous les éléments de E appartiennent à F . on dit que E est inclus dans F , ou que F contient E , ou que E est une partie de F $E \subset F \iff \forall x (x \in E \Rightarrow x \in F)$
Parties d'un ensemble	$\mathcal{P}(E)$	Les ensembles inclus dans E . $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$
Réunion	$E \cup F$	Éléments de E et de F mis ensemble $E \cup F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ ou } x \in F\}$
Intersection	$E \cap F$	Éléments appartenant à la fois à E et à F $E \cap F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \in F\}$
Ensembles disjoints	$E \cap F = \emptyset$	E et F n'ont aucun élément commun.
Complémentaire	$\complement_E F$ ou $E \setminus F$ ou \bar{F}	Complémentaire de F dans E , Éléments de E n'appartenant pas à F . $\complement_E F = \{x \in E \text{ tel que } x \notin F\}$
Produit cartésien	$E \times F$ E^2	Ensemble des couples $E \times F = \{(x, y) \text{ tel que } x \in E, y \in F\}$ $= E \times E$. se généralise à n ensembles.
n-uplet		Élément de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \prod_{i=1}^n E_i$
p-liste		Élément de E^n . (cas particulier de p-uplet)
Famille	$(x_i)_{i \in I}$ E^I	Suite d'éléments indexés par I (I est l'ensemble des indices) Si $I = [1; p]$, on retrouve les p-listes. Ensemble des familles de E indexées par I .

1 MÉTHODES

Prouver une inclusion :

Pour montrer $A \subset B$ on montre que tous les éléments de A sont aussi dans B .
Concrètement, on prend x *quelconque* dans A et on montre que $x \in B$.

Prouver une égalité par double inclusion :

$$E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E)$$

2 ENSEMBLES DE NOMBRES

- N** les entier naturels 0, 1, 2, 3, 4, ...
Z les entier relatifs ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
Q les rationnels (quotients de deux entiers) $\frac{1}{4}, \frac{2}{825}, -\frac{5}{3}, 3, 5 = \frac{35}{10}, \dots$
R les réels 0, 5, -4, $\frac{2}{3}, -\frac{3}{7}, \pi, \dots$
C les complexes $3 + 2i, 5i, -2\sqrt{3}(1 + i), 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \dots$
- Une **étoile** en exposant si l'ensemble est privé de l'élément 0 : $\mathbf{N}^* = \{n \geq 1\}$
 - Un « **plus** » en exposant ou en indice pour les positifs : $\mathbf{R}_+ = \mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$,
 $\mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$.
 - Un « **moins** » pour les nombres négatifs (ou nuls) : $\mathbf{R}_- =]-\infty, 0]$.

3 PROPRIÉTÉS

Involutivité du complémentaire : $\overline{\bar{A}} = A$

Distributivité :

$$(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$$

$$(A_1 \cap A_2) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B)$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$$

Formules de De Morgan :

$$\complement_E(A \cup B) = \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{et} \quad \complement_E(A \cap B) = \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\complement_E\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \complement_E A_i \quad \text{et} \quad \complement_E\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \complement_E A_i$$

4 CORRESPONDANCE AVEC LE LANGAGE ENSEMBLISTE

Langage probabiliste	Notation	langage ensembliste
univers	Ω	ensemble
événement élémentaire	$\omega \in \Omega$	élément
issue		
épreuve		
événement	$A \subset \Omega$	partie de Ω
A est réalisé	$\omega \in A$	ω est élément de A , appartenance
A implique B	$A \subset B$	A est inclus dans B
A ou B	$A \cup B$	réunion
A et B	$A \cap B$	intersection
contraire de A	\bar{A}	complémentaire
événements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$	ensembles disjoints
famille complète d'événements	\rightarrow	\approx partition (voir remarque dans le cours)