

PROBABILITÉS FINIES

1 ÉVÉNEMENTS

- **Univers** = ensemble non vide (fini dans ce chapitre). Notation : Ω .
- **Événement** = partie de Ω . Notation : \mathcal{E} est l'ensemble des événements.
- **Événement élémentaire** (ou **issue possible**) = événement **singleton**.
- $(A_i)_{i \in I}$ est une **famille complète d'événements**, si

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega, \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in I^2, \text{ si } i \neq j \text{ alors } A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Opérations sur les événements :

- « A ou B » = « $A \cup B$ », • « A et B » = « $A \cap B$ »,
- « contraire de A » = « \overline{A} ». • « $A \cap B = \emptyset$ » = « A et B incompatibles ».

2 PROBABILITÉ

Une probabilité \mathbf{P} sur Ω fini, est une application de \mathcal{E} dans \mathbf{R} telle que

1. $\forall A \in \mathcal{E}, 0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$,
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
3. Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Dans ce cas :

4. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
5. Si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$. (croissance)
6. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
7. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$. (formule du crible)
8. $\mathbf{P}\left(\bigcup_{0 \leq i \leq n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$.

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ est un **espace probabilisé fini**.

- Si $\mathbf{P}(A) = 0$, alors l'événement A est **négligeable**.
- Si $\mathbf{P}(A) = 1$, alors l'événement A est **presque certain**.

Description par les événements élémentaires :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Dans ce cas : $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

Modèle équiprobable : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i = \frac{1}{n}$ $\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

3 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Probabilité conditionnelle de B sachant A (pour $\mathbf{P}(A) \neq 0$)

$$\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}$$

Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}_{B(A)}\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}$$

4 INDÉPENDANCE

A et B sont **indépendants** $\iff \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.
 $\iff \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$ (si $\mathbf{P}(A) \neq 0$).

$(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont **mutuellement indépendants**, si **pour toute partie J** de $\llbracket 1; n \rrbracket$

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbf{P}(A_i).$$

\triangle $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) \not\iff A, B, C$ mutuellement indépendants.

5 TROIS FORMULES

Formule des probabilités composées

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Formule des probabilités totales

Si $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille complète d'événements de probabilités non nulles

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{B_i}(A)\mathbf{P}(B_i)$$

Formule de Bayes

Soit A un événement de (Ω, \mathbf{P}) , et $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille complète d'événements, Si $\mathbf{P}(A) > 0$, alors

$$\mathbf{P}_A(B_k) = \frac{\mathbf{P}_{B_k}(A)\mathbf{P}(B_k)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}_{B_k}(A)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{B_i}(A)\mathbf{P}(B_i)}$$