Suites réelles

Produit convergent :
Si (u_n) est bornée et si (ε_n) tend vers 0, alors $(u_n\varepsilon_n)$ tend vers 0.

Signe d'une suite convergente :
Si $v_n \to \ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Théorème de la limite monotone :
Si (u_n) est une suite monotone, alors (u_n) admet une limite finie ou infinie.

Théorème d'encadrement / théorème des gendarmes :
Si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ,
et si $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leq w_n \leq v_n$,
alors (w_n) est convergente de limite ℓ.

Théorème de minoration :
Si $u_n \to +\infty$ et si $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq v_n$, alors $v_n \to +\infty$.

Passage des inégalités à la limite :

- Si (u_n) et (v_n) convergent et si $\forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- Si (u_n) converge et $\forall n \geq n_0, u_n \leq a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq a$.
- Si (u_n) converge et $\forall n \geq n_0, u_n \geq a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq a$.

Composition avec une application :
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Suites adjacentes
u et v sont **adjacentes**, si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $u - v \to 0$.

$\boxed{\text{Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.}}$

Suites arithmético-géométrique

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b \quad a \neq 1$$

- Recherche du point fixe ℓ tel que $\ell = a\ell + b$.
- $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a.

Croissances comparées Si $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbf{R},\ a > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\beta n}{n^\alpha} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

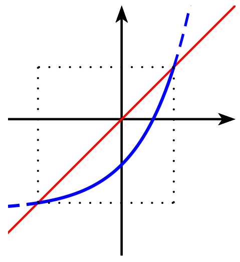
Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Vérification préalable :

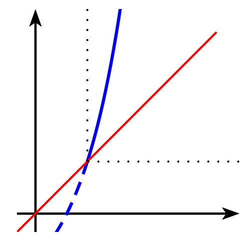
- Domaine de définition de f,
- Vérification que u_n est défini pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Monotonie de la suite : Étude des positions relatives de $f(x)$ et x.
→ On cherche une partie A stable par f, sur laquelle

$y = f(x)$ est **au dessus** de $y = x$.
→ suite croissante.



$y = f(x)$ est **en dessous** de $y = x$.
→ suite décroissante.



→ *Théorème de la limite monotone*

Si f est continue : utiliser la notion de point fixe.
permet de prouver la non convergence ou la valeur de la limite, mais ne prouve pas la convergence.

Méthode hors programme : utilisation des variations de f.
→ On cherche une partie A stable par f sur laquelle f est monotone.

Si f est croissante sur A	Si f est décroissante sur A	
(u_n) est monotone *Théorème de la limite monotone*	(u_{2n}) et (u_{2n+1}) monotones de sens contraire	
→ (u_n) admet une limite $u_n \to \ell \in \mathbf{R}$ ou $u_n \to \pm\infty$	Si $u_{2n+1} - u_{2n} \to 0$	Cas général
	suites adjacentes	*Th. limite monotone*
Si A **est bornée**, → (u_n) converge vers $\ell \in \mathbf{R}$.	$\exists \ell \in \mathbf{R}$, tel que $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$	**Si** A est bornée → (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent.
Si (u_n) converge et **Si** f est continue, alors $u_n \to \ell$ un point fixe de f avec $f(\ell) = \ell$.	$u_n \to \ell$	**Si** f est continue, alors $u_{2n} \to \ell_1$ point fixe de $f \circ f$. $u_{2n+1} \to \ell_2$ point fixe de $f \circ f$. **Si** $\ell_1 = \ell_2$ alors $u_n \to \ell_1$