

SUITES RÉELLES

Produit convergent :

Si (u_n) est bornée et si (ε_n) tend vers 0, alors $(u_n \varepsilon_n)$ tend vers 0.

Signe d'une suite convergente :

Si $u_n \rightarrow \ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Théorème de la limite monotone :

Si (u_n) est une suite monotone, alors (u_n) admet une limite finie ou infinie.

Théorème d'encadrement / théorème des gendarmes :

Si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ ,
et si $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq w_n \leq v_n$,
alors (w_n) est convergente de limite ℓ .

Théorème de minoration :

Si $u_n \rightarrow +\infty$ et si $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq v_n$, alors $v_n \rightarrow +\infty$.

Passage des inégalités à la limite :

- Si (u_n) et (v_n) convergent et si $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- Si (u_n) converge et $\forall n \geq n_0, u_n \leq a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq a$.
- Si (u_n) converge et $\forall n \geq n_0, u_n \geq a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq a$.

Composition avec une application :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Suites adjacentes

u et v sont **adjacentes**, si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $u - v \rightarrow 0$.

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Suites arithmético-géométrique

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = au_n + b \quad a \neq 1$$

- Recherche du point fixe ℓ tel que $\ell = a\ell + b$.
- $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a .

Croissances comparées Si $\alpha > 0, \beta \in \mathbf{R}, a > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta n}{n^\alpha} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$