

INÉGALITÉS

1 OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES SUR LES INÉGALITÉS

$$\forall a \in \mathbf{R}, \quad x < y \iff a + x < a + y.$$

La multiplication par un nombre *strictement positif* conserve les inégalités larges et strictes :

$$\forall a > 0, \quad x < y \iff ax < ay.$$

La multiplication par un nombre *strictement négatif* change le sens des inégalités larges et strictes :

$$\forall a < 0, \quad x < y \iff ax > ay.$$

Le passage à l'inverse de nombres *strictement de même signe*, change le sens des inégalités :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}_+^*, \quad x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}_-^*, \quad x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}.$$

- On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens :

$$(x < y \text{ et } x' \leq y') \Rightarrow x + x' < y + y'.$$

Remarquer que l'inégalité stricte « gagne » pour la somme.

- On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens **si tous les termes sont positifs** :

$$(0 \leq x < y \text{ et } 0 < x' \leq y') \Rightarrow xx' < yy'.$$

Remarquer que l'inégalité stricte « gagne » pour le produit, à condition de ne pas multiplier par 0.

Remarque : Lorsqu'une propriété est vraie pour des inégalités strictes, elle est aussi vraie pour des inégalités larges. La réciproque est fausse.

⚠ Les inégalités sont un des domaines qui demandent le plus de rigueur. Quand on doit résoudre ou établir une inégalité, il ne faut **jamais** céder à l'intuition : « c'est évident » (qui se transforme souvent en « c'est faux »). Il faut donc **toujours** se référer à ces quelques règles et à celles qui suivent à chaque étape du raisonnement.

2 COMPOSITION D'INÉGALITÉS PAR DES FONCTIONS

Soit I un intervalle de \mathbf{R} , et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application réelle.

On dit que f est **croissante** sur I , si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

En français : « Une fonction croissante est une fonction qui conserve les inégalités larges par passage à l'image. »

On dit que f est **strictement croissante** sur I , si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

En français : « Une fonction *strictement* croissante est une fonction qui conserve les inégalités *strictes* par passage à l'image. »

On dit que f est **décroissante** sur I , si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

En français : « Une fonction décroissante est une fonction qui inverse les inégalités larges par passage à l'image. »

On dit que f est **strictement décroissante** sur I , si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

En français : « Une fonction *strictement* décroissante est une fonction qui inverse les inégalités *strictes* par passage à l'image. »

À retenir :

- Compose une inégalité par une fonction croissante préserve son sens.
- compose une inégalité par une fonction décroissante « échange » son sens.
- Pour obtenir des inégalités larges, il suffit d'une fonction (dé)croissante, pour des inégalités strictes, il faut la stricte (dé)croissance.
- Lorsque la monotonie est *stricte*, on peut passer à l'antécédent.
Par exemple, $\ln(x) \leq \ln(y) \Rightarrow x \leq y$.

⚠ Vérifier la monotonie (croissance/décroissance) sur **tout** le domaine de validité de l'inégalité. Par exemple $x \geq y \not\Rightarrow x^2 \geq y^2$ si les signes sont quelconques, car la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur \mathbf{R} .

3 INÉGALITÉS SUR LES ANTÉCÉDENTS

Les règles sont « contraires » à celles du passage à l'image.

Monotonie stricte \longrightarrow **inégalités larges ou strictes.**

La **stricte** croissance conserve les inégalités larges ou strictes par passage à l'antécédent.

Soit I un intervalle de \mathbf{R} , et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application réelle.

Si f est **strictement** croissante sur I , alors

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in I^2, \quad & f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \leq y, \\ & f(x) < f(y) \Rightarrow x < y, \\ & f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \geq y, \\ & f(x) > f(y) \Rightarrow x > y.\end{aligned}$$

De même :

La **stricte** décroissance « inverse » les inégalités larges ou strictes par passage à l'antécédent.

Si f est **strictement** décroissante sur I , alors

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in I^2, \quad & f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \geq y, \\ & f(x) < f(y) \Rightarrow x > y, \\ & f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \leq y, \\ & f(x) > f(y) \Rightarrow x < y.\end{aligned}$$

Monotonie large \longrightarrow **inégalités strictes.**

La monotonie **large** ne permet que de traiter les inégalités **strictes**.

Si f est croissante sur I , alors

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in I^2, \quad & f(x) < f(y) \Rightarrow x < y, \\ & f(x) > f(y) \Rightarrow x > y.\end{aligned}$$

Si f est décroissante sur I , alors

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in I^2, \quad & f(x) < f(y) \Rightarrow x > y, \\ & f(x) > f(y) \Rightarrow x < y.\end{aligned}$$

4 INÉGALITÉS SUR LES FONCTIONS USUELLES

Elle se démontrent facilement par l'étude des fonctions associées ou avec un argument de convexité, ou encore l'inégalité des accroissements finis.

Inégalité	Domaine
$\ln(1+x) \leq x$	$x > -1$
$e^x \geq 1+x$	$x \in \mathbf{R}$
★ $\tan x \geq x$	$x \in [0, \frac{\pi}{2}[$
★ $\sin x \leq x$	$x \geq 0$
$ \sin x \leq x $	$x \in \mathbf{R}$

5 COMMENT TROUVER DES INÉGALITÉS

Différentes pistes pour trouver/prouver des inégalités :

Sera travaillé au cours de l'année : si tout n'est pas clair ici, ce n'est pas grave.

- Dépend d'un argument réel :
 - Étudier la fonction, trouver un maximum, ou comparer avec une tangente. (comme pour les inégalités usuelles plus haut)
 - Utiliser le théorème des bornes atteintes
 - * pour une fonction continue sur un segment.
 - * adapté pour des problèmes abstraits.
- Pour une somme :
 - majorer/minorer terme à terme.
 - utiliser l'inégalité triangulaire.
- Pour une suite (dépend d'un argument entier) :
 - utiliser la croissance ou décroissance,
 - conjecture + preuve par récurrence.
 - utiliser le caractère convergent.
 - * toute suite convergente est bornée.
 - * adapté pour des problèmes abstraits.