Sommes

Remarque : Une somme vide est nulle.

1 Sommes usuelles

Constantes : $\boxed{\text{(nombre de termes)} \times a}$

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n-m+1)a.$$

Somme arithmétique : $\boxed{\text{(nombre de termes)} \times \dfrac{\text{somme des termes extrêmes}}{2}}$

Si (u_n) est une suite arithmétique, $m \leqslant n$

$$\sum_{k=\mathbf{m}}^{n} u_k = (n-m+1)\frac{u_n+u_m}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=\mathbf{0}}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_n+u_0}{2}.$$

Cas particulier :

$$\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(n+m)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somme géométrique : $\boxed{\text{(premier terme)} \times \dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}}$

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, $m \leqslant n$

$$\sum_{k=\mathbf{m}}^{n} u_k = u_m\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \quad \text{et} \quad \sum_{k=\mathbf{0}}^{n} u_k = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Cas particulier :

$$\sum_{k=\mathbf{m}}^{n} q^k = q^m\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=\mathbf{0}}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Sommes d'Euler

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Hors programme pour les deux dernières, mais c'est bien si vous les connaissez.

2 Méthodes de calcul

La linéarité : « couper la somme en petits morceaux »

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} v_k.$$

Décalage d'indice :

$$\sum_{k=m}^{n} a_{k+1} = \sum_{j=m+1}^{n+1} a_j.$$

Exemples : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Somme télescopique :

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m.$$

Exemple : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Partition de l'ensemble de sommation : on sépare la somme, par exemple sur le critère de la parité :

Exemple : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$.

3 Sommes doubles

Penser à échanger de l'ordre de sommation.
Pour la méthode, écrire les relations sous forme d'une chaîne d'inégalités.

Exemple : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$.

Produits

Remarque : Un produit vide est égal à 1.

1 Règles de calcul

$$\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right) \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k^{\alpha} = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^{\alpha}.$$

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

Exemple : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k}(k+3)$.

Produit télescopique : si les (a_k) **ne s'annulent pas**, alors

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Exemple : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k}$.

2 Factorielle

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Par convention : $0\,! = 1\,$.

3 Coefficients binomiaux

A Définition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Par convention : si $n < k$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

B Propriétés remarquables

$\forall n \geqslant k \in \mathbf{N}^2$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{i}.$$

Valeurs remarquables : $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

et $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$

Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

« formule sans nom » : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ pour $k \neq 0$

Triangle de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

La formule de Pascal est aussi valable pour $n < k$

Exemple : Pour $p \leqslant n$, calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p}$.

4 Formules calculatoires

Égalité de Bernoulli
$\forall (a,b) \in \mathbf{C}^2$, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \;=\; (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

Binôme de Newton
$\forall (a,b) \in \mathbf{C}^2$, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0.$$

Exemple : Pour $x \in \mathbf{R}$, développement (rapide) de $(1+x)^7$.