# Vademecum sur l'étude des fonctions

**Méthode**

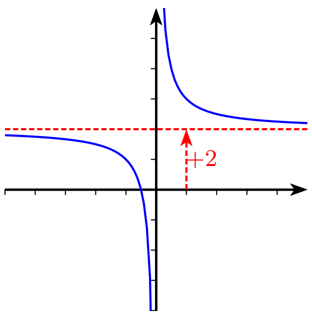
Lorsque l'on étudie une fonction, on répond aux questions (dans l'ordre) :

1. **Domaine de définition** de la fonction, éventuellement domaine de continuité, dérivabilité...
2. **Réduction du domaine d'étude**
3. **Variations :**
   On étudie les variations de la fonction, on repère les éventuelles tangentes horizontales.
   On calcule les valeurs de $f$ aux points remarquables.
4. **Limites, asymptotes, branches infinies** aux bords du domaine de définition.
5. **Tracer le graphe :** lorsque c'est possible, on trace le graphe de la fonction.
   Ne pas oublier les asymptotes, points et tangentes remarquables...

## A Translation des graphes

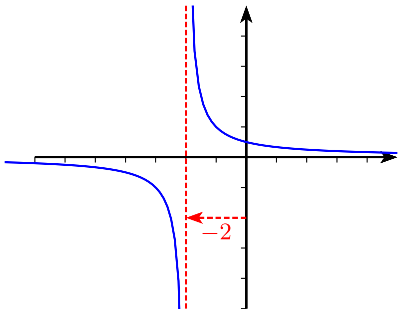
### Translation verticale

*Exemple* :
La courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x} + 2$ est la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ translatée de $+2$ vers le haut.




### Translation horizontale

*Exemple* :
La courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ est la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ translatée de $-2$ horizontalement.




## B Continuité

$f$ est continue en $a$ si $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a)$

**Théorème des valeurs intermédiaires**
Si $f$ est continue sur un intervalle $I$ contenant $[a,b]$.
Alors $f$ prend toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$.
*Autre formulation :* L'image d'un intervalle par une application continue (à valeurs réelles) est un intervalle.

**Théorème de la bijection continue**
Si $f$ est continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, alors $f(I)$ est un intervalle et $f$ est bijective de $I$ dans $f(I)$.
De plus, $f^{-1}$ est elle-même continue, strictement monotone et de même monotonie que $f$.

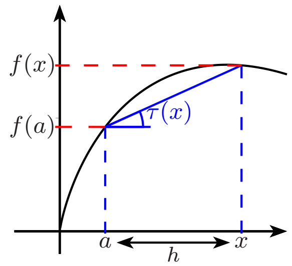
**Théorème des bornes atteintes**
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : elle possède un maximum et un minimum.
*Autre formulation :* L'image d'un segment par une application continue est un segment.

## C Dérivabilité

Le **taux d'accroissement** de $f$ en $a$ est défini par

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

il désigne la pente entre les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.




- $f$ est dérivable en $a$ si $\tau_a(x)$ a une limite finie quand $x \to a$,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

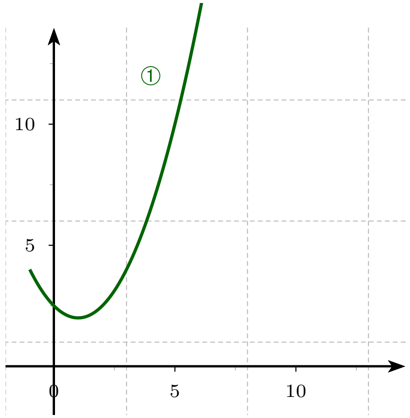
  (on a posé $h = x - a$)
  Dans ce cas, la courbe admet une **tangente** au point $a$ dont la pente est $f'(a)$ :

$$T_a \,:\, y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

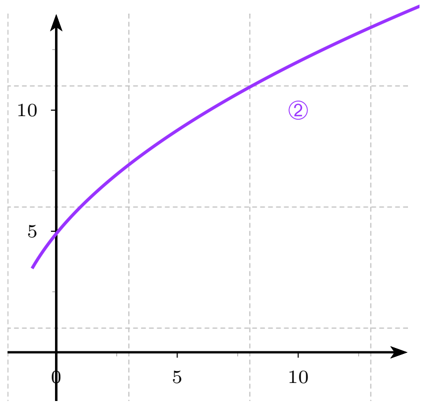
  – si $f'(a) = 0$ : tangente horizontale.
  – si $f'(a) > 0$ : tangente de pente positive (fonction croissante).
  – si $f'(a) < 0$ : tangente de pente négative (fonction décroissante).

- Si le taux d'accroissement admet une limite infinie, alors $f$ n'est pas dérivable en $a$ et la courbe admet une tangente verticale en $a$.
  (dirigée vers le haut ou vers le bas suivant le signe de la dérivée)

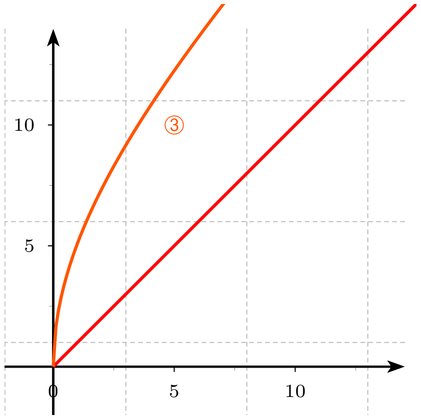
## D Branches asymptotiques



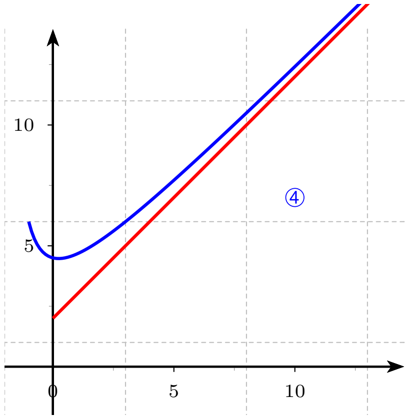

**branche parabolique** de direction verticale




**branche parabolique** de direction horizontale




**branche parabolique** de direction $y = ax$




**asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$

### Nature des branches en $+\infty$

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = \ell$ au voisinage de $+\infty$.
- si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$,
  - ① si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
  - ② si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
  - si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}^*$,
    - ③ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$.
    - ④ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbf{R}$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

Dans les autres cas on ne peut pas conclure.

### Position par rapport à une asymptote :

Lorsque la courbe admet une asymptote horizontale ou oblique, on peut déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'asymptote $y = ax + b$ en étudiant le signe de la différence.