

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Solutions = Solutions homogènes « + » solution particulière.

1 ORDRE 1 À COEFFICIENT CONSTANT

$$y' + ay = b(t).$$

Solutions de l'équation homogène :

$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto \lambda e^{-at}, \lambda \in \mathbf{K}\}.$$

Solution particulière :

- **Second membre constant**

- Si $a \neq 0$ $t \mapsto \frac{b}{a}$ convient.
- Si $a = 0$ $t \mapsto bt$ convient.

- **Polynôme - exponentielle**

$$b(t) = P(t) e^{\gamma t} \text{ avec } P \in \mathbf{K}[X].$$

- si $\gamma \neq -a$, on cherche une solution sous la forme

$$t \mapsto Q(t) e^{\gamma t} \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P.$$

- si $\gamma = -a$, on cherche une solution sous la forme

$$t \mapsto tQ(t) e^{\gamma t} \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P.$$

- **Fonction trigonométrique**

Passer par les complexes et utiliser la méthode précédente.

- **Autre second membre : variation de la constante.**

On écrit la solution sous la forme

$$f : t \mapsto \lambda(t) e^{-at} \text{ avec } \lambda \text{ dérivable.}$$

- On « injecte » cette solution dans l'équation différentielle (sans oublier de dériver λ),
- on en déduit la valeur de $\lambda'(t)$,
- on trouve $\lambda(t)$ en intégrant (à une constante près).

2 ORDRE 1 À COEFFICIENT CONTINU

$$y' + a(t)y = b(t).$$

Solutions de l'équation homogène sur un intervalle :

On note A une primitive de a sur I .

$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbf{K}\}.$$

Solution particulière : Utiliser la méthode de la variation de la constante.

3 ORDRE 2 À COEFFICIENT CONSTANT

$$ay'' + by' + cy = d(t) \quad \text{avec } a \neq 0.$$

On pose l'équation caractéristique : $ax^2 + bx + c = 0$ de discriminant Δ .

- **Si $\Delta \neq 0$**

r_1 et r_2 : racines (distinctes) de l'équation caractéristique.

$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2\}.$$

- **Si $\Delta = 0$**

r : racine double de l'équation caractéristique.

$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto (\lambda + t\mu) e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2\}.$$

- **Si $\Delta < 0$** , on obtient les solutions **réelles** avec

r_1 et r_2 : racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique. $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) e^{\alpha t}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Solution particulière si $d(t) = P(t) e^{\gamma t}$ avec $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\gamma \in \mathbf{K}$.

- si γ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche sous la forme $t \mapsto Q(t) e^{\gamma t}$ avec $\deg Q = \deg P$.
- si γ est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche sous la forme $t \mapsto tQ(t) e^{\gamma t}$ avec $\deg Q = \deg P$.
- si γ est racine double de l'équation caractéristique, on cherche sous la forme $t \mapsto t^2 Q(t) e^{\gamma t}$ avec $\deg Q = \deg P$.