

Définitions

1. **Négligeable** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

$$u_n = o(v_n). \\ \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \epsilon |v_n|.$$

2. **Équivalentes** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

$$u_n \sim v_n. \\ \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - v_n| \leq \epsilon |v_n|.$$

$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n) \iff u_n - v_n = o(u_n).$$

3. **Dominée** : $\frac{u_n}{v_n}$ borné.

$$u_n = O(v_n). \\ \exists K > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq K |v_n|.$$

$$u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n) \quad \text{et} \quad u_n \sim v_n \Rightarrow u_n = O(v_n).$$

Transitivité : les trois relations sont transitives.

L'équivalence :

1. \sim est une relation d'équivalence.
2. Deux suites équivalentes sont de même signe (strict) à partir d'un certain rang.
3. Deux suites équivalentes ont le même comportement asymptotique : elles sont de même nature et si l'une admet une limite finie ou infinie, alors l'autre possède la même limite.

Opérations sur les équivalents :

1. On peut **multiplier** les équivalents :

$$\begin{aligned} \text{si } u_n \sim v_n \text{ et } u'_n \sim v'_n & \text{ alors, } u_n u'_n \sim v_n v'_n. \\ \text{si } u_n \sim v_n \text{ et } \lambda \in \mathbf{R} & \text{ alors, } \lambda u_n \sim \lambda v_n. \\ \text{si } u_n \sim v_n \text{ et } \alpha \in \mathbf{R} & \text{ alors, } u_n^\alpha \sim v_n^\alpha. \end{aligned}$$

2. Si $u_n \sim v_n$ alors leurs suites extraites sont aussi équivalentes.
3. On ne peut **pas** additionner des équivalents,
4. On ne peut **pas** composer les équivalents avec une fonction.

Opérations sur les « o » :

Les opérations sont les mêmes pour les petits « o » et les grands « O ».

1. *Combinaisons linéaires* :

$$\text{Si } u_n = o(v_n) \text{ et } u'_n = o(v_n), \text{ alors } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \lambda u_n + \mu u'_n = o(v_n).$$

2. *Produit* :

$$\text{Si } u_n = o(v_n) \text{ et } u'_n = o(v'_n), \text{ alors } u_n u'_n = o(v_n v'_n).$$

3. *Produit par une même suite* :

$$\text{Si } u_n = o(v_n), \text{ et } (a_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \text{ (ne s'annule pas à partir d'un certain rang), alors } a_n u_n = o(a_n v_n).$$

4. *Passage à la puissance* :

$$\text{Si } u_n = o(v_n) \text{ et } \alpha > 0, \text{ alors } u_n^\alpha = o(v_n^\alpha).$$

5. *Suites extraites* :

$$\text{Si } u_n = o(v_n) \text{ et } \varphi \text{ une fonction d'extraction, alors } u_{\varphi(n)} = o(v_{\varphi(n)}).$$

Croissances comparées :

(On peut remplacer n par toute suite qui tend vers $+\infty$.)

Soient $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ des réels

1. Si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$,
2. Si $|a| < |b|$, alors $a^n = o(b^n)$,
3. Si $\beta > 0$, alors $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$,
4. Si $a > 1$, alors $n^\beta = o(a^n)$.
5. $a^n = o(n!)$.

$$\text{Pour } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ et } a > 1, \quad (\ln^\beta n) \ll (n^\alpha) \ll (a^n) \ll (n!).$$

Équivalents usuels :

Si $u_n \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} e^{u_n} - 1 &\sim u_n & \sin u_n &\sim u_n & \text{sh}(u_n) &\sim u_n \\ \ln(1 + u_n) &\sim u_n & \cos u_n - 1 &\sim -\frac{u_n^2}{2} & \text{ch}(u_n) - 1 &\sim \frac{u_n^2}{2} \\ \sqrt{1 + u_n} - 1 &\sim \frac{u_n}{2} & \tan u_n &\sim u_n & \text{th}(u_n) &\sim u_n \\ (1 + u_n)^\alpha - 1 &\sim \alpha u_n & \text{Arctan } u_n &\sim u_n & & \end{aligned}$$

avec $\alpha \neq 0$.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$