Dénombrement

1 Ensembles finis

Parties d'un ensemble E fini :

Si $A \subset E$, alors A fini et $\text{Card}\, A \leqslant \text{Card}\, E$.
De plus, $(\text{Card}\, A = \text{Card}\, E) \iff A = E$.

méthode : Égalité entre deux ensembles.
On montre une inclusion et qu'ils sont de même cardinal.

Complémentaire d'une partie dans un ensemble E fini :

Si $A \subset E$, alors $\overline{A} = E \setminus A$ fini et

$$\text{Card}\, \overline{A} = \text{Card}\, (E \setminus A) = \text{Card}\, E - \text{Card}\, A.$$

méthode : passer par le complémentaire pour des dénombrements de type « au moins ».

Cardinal d'une réunion :

Si A et B sont des ensembles finis, alors $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\text{Card}\, (A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B - \text{Card}\, (A \cap B).$$

Cardinal d'une produit cartésien :

Si A et B sont des ensembles finis, alors

$$\text{Card}\, (A \times B) = \text{Card}\, A \times \text{Card}\, B.$$

Si $(A_i)_{i \in [\![1,\, n]\!]}$ sont des ensembles finis, alors

$$\text{Card}\, \left(\prod_{i=1}^{n} A_i \right) = \prod_{i=1}^{n} \text{Card}\, A_i.$$

2 Applications

Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$.

1. Si f est injective alors $\text{Card}\, E \leqslant \text{Card}\, F$.
2. Si f est surjective alors $\text{Card}\, E \geqslant \text{Card}\, F$.
3. Si f est bijective alors $\text{Card}\, E = \text{Card}\, F$.

Si de plus, $\text{Card}\, E = \text{Card}\, F$ alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

3 Combinatoire

On note $\text{Card}\, E = p$ et $\text{Card}\, F = n$.

p-uplets – applications $E \to F$ *(tirage avec ordre et remise)*

$$\text{Card}\, (F^p) = (\text{Card}\, F)^p = n^p = \text{Card}\, \left(F^E\right).$$

p-arrangements – injections $E \to F$ *(tirage avec ordre et sans remise)*

$$\text{si } n \leqslant p, \text{ alors} \qquad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

permutations – bijections $E \to F$
(réordonner les éléments, tirage exhaustif avec ordre et sans remise)

$$\text{si } n = p \ : \qquad n!.$$

parties (ou p-combinaisons) *(tirage sans ordre ni remise, ou simultané)*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}.$

		Avec répétition : OUI	Avec répétition : NON
Liste ordonnée	OUI	p-listes n^p	p-arrangements $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
Liste ordonnée	NON	(p-*suites*)	p-combinaisons $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$

Somme ou produit ?

- **Somme = disjonction des cas**
  C'est une union disjointe. Chaque « sous-dénombrement » correspond à des tirages complets.
- **Produit = décomposition du tirage**
  On décompose chaque tirage. Les « sous-dénombrement » correspondent chacun à une partie du tirage total.