Fractions rationnelles

A Définitions

Forme irréductible : $F = \dfrac{P}{Q}$ tel que $P \wedge Q = 1$ et Q unitaire.

Degré : $\deg F = \deg P - \deg Q$,

$$\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max\left(\deg F_1, \deg F_2\right), \qquad \deg(F_1 F_2) = \deg F_1 + \deg F_2.$$

Pour $F = \dfrac{P}{Q}$ sous forme irréductible.

- Les **pôles** de F sont les racines de Q.
  La **multiplicité du pôle** correspond à la multiplicité de la racine pour Q.
- Les **zéros** de F sont les racines de P.
  La **multiplicité du zéro** correspond à la multiplicité de la racine pour P.

B Décomposition sur C

1. partie entière E : $P = EQ + R \quad \Rightarrow \quad F = E + \dfrac{R}{Q}$ avec $\deg R < \deg Q$.
2. Factoriser Q : $Q = \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{m_i}$.
3. Décomposer la partie fractionnaire : $\dfrac{R}{Q} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j}$.
4. Trouver les coefficients $a_{i,j}$.

Méthode d'obtention des coefficients :

- Mise au même dénominateur (dernier recours)
- Pour le coefficient de plus grande puissance :
  - *(évaluation)* $a_m = \Big((X - \alpha)^m F\Big)(\alpha)$,
  - *(dérivation)* $a_m = m! \dfrac{R(\alpha)}{Q^{(m)}(\alpha)}$.
    Pour un pôle simple $a_1 = \dfrac{R(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

  On peut ensuite trouver les autres coefficients du même pôle de proche en proche en remarquant que pour $P - \dfrac{a_m}{(X - \alpha)^m}$ α est un pôle de multiplicité inférieure ou égale à $m - 1$, ce qui permet donc de trouver a_{m-1}.
- Évaluation en $\pm\infty$, en α qui n'est pas un pôle, utilisation de la parité de F,...
- *(somme des résidus)* on pose $s = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}$,
  - si $\deg \frac{R}{Q} = -1$, alors s est égal à la partie entière de $\frac{XR}{Q}$;
  - si $\deg \frac{R}{Q} < -1$, alors $s = 0$.
- Utiliser la parité ou imparité de la fraction pour avoir des relations entre pôles.
- Si la fraction est dans $\mathbf{R}(X)$, alors ses pôles complexes sont conjugués et de même multiplicité.
  Pour α pôle complexe de multiplicité m, on a alors les coefficients de $\frac{1}{(X-\alpha)^k}$ et $\frac{1}{(X-\overline{\alpha})^k}$ conjugués.

C Décomposition sur R

1. partie entière E : $P = EQ + R \quad \Rightarrow \quad F = E + \dfrac{R}{Q}$ avec $\deg R < \deg Q$.
2. Factoriser Q : $Q = \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{q} (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{r} (X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^{\mu_i}$.
3. Décomposer la partie fractionnaire :
$$\frac{R}{Q} = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} \quad + \quad \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{b_{i,j} X + c_{i,j}}{(X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^j}.$$
4. Trouver les coefficients $a_{i,j}$, pour cela on peut
   (a) utiliser des méthodes similaires à celles sur $\mathbf{C}$,
   (b) ne pas hésiter à évaluer le polynôme en des pôles complexes.