Espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : $F \subset E$ est un **K**-sous-espace vectoriel de E si

1. F contient 0_E (non vide),
2. F est stable par combinaison linéaire : $\forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\quad x + \lambda y \in F$.

Sous-espace vectoriel engendré par $(x_i)_{i\in I}$:
ensemble des combinaisons linéaires des $(x_i)_{i\in I}$ = plus petit sev contenant les $(x_i)_{i\in I}$.

$$\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I} = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i x_i,\ \ (\lambda_i) \in \mathbf{K}^{(I)} \text{à support fini.} \right\} = \bigcap_{F \text{ sev contenant } \{x_i\}_{i\in I}} F.$$

Opérations sur les espaces vectoriels :

- Produit cartésien.
- Intersection : OK.
  Toute intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel.
- Union : Attention.
  En général l'union de deux espaces vectoriels **n'est pas** un espace vectoriel.
- $\to$ Somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k,\ \forall k \in [\![1,\, n]\!],\ x_k \in F_k \right\} = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k \right)$.
  La somme est *directe* si la décomposition est unique (il suffit de le vérifier pour le vecteur nul).
  Pour deux espaces : $F + G = F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}$.
- Espaces supplémentaires : F et G supplémentaires dans E
  - si, et seulement si $F \oplus G = E$.
  - si, et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$, avec $(x_F,\, x_G) \in F \times G$.

Familles de vecteurs $(x_i)_{i\in I} \in E^I$.

- **Libre :** aucun vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
  Les vecteurs sont *linéairement indépendants :*
  pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini : $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0$.
- **Liée :** (contraire de libre) un vecteur est combinaison linéaire des autres.

$$\exists (\lambda_i) \in \mathbf{K}^{(I)} \text{ non tous nuls, tel que} \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E\,.$$

- **Génératrice de** F : tout vecteur de F peut se décomposer dans la famille.

$$\forall x \in F,\ \exists (\lambda_i) \in \mathbf{K}^{(I)},\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ c'est-à-dire } F = \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}\,.$$

- **Base de** F : libre + génératrice.

Libre	**Génératrice de F**	**Base de F**
unicité de la décomposition	existence de la décomposition	existence & unicité
retire un vecteur $\to$ reste libre	ajoute un vecteur $\to$ reste génératrice	- -

Compléter une famille libre :
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre de E et $y \in E$,
alors la famille complétée par y est libre si et seulement si

$$y \notin \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}\,.$$

Sous-espaces affines :
$\mathscr{F} = x + F$ avec $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E.
F s'appelle la *direction* de $\mathscr{F}$ (définie de manière unique).

$$B = A + \overrightarrow{u} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}.$$

Deux sous-espaces affines sont égaux si, et seulement s'ils sont même direction et un point commun.

Pour $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de E, de directions respectives F_i,

$$\bigcap\nolimits_{i\in I} \mathscr{F}_i \text{ est soit vide, soit un sous-espace affine de } E \text{ de direction } \bigcap_{i\in I} F_i.$$

Dimension finie

E est supposé être un espace vectoriel de dimension finie.

$$\operatorname{rg}(x_i)_{i\in I} = \dim\left(\operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I}\right).$$

$$\textbf{Famille libre} \xrightarrow[\text{ajoute des vecteurs}]{} \textbf{Base} \xleftarrow[\text{retire des vecteurs}]{\text{Th. base extraite}} \textbf{Famille génératrice}$$

Base = famille libre maximale = famille génératrice minimale

Théorème de la base extraite
De toute famille génératrice finie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (non réduit à 0), on peut extraire une base de E.

Théorème de la base incomplète Toute famille libre d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (non réduit à 0) peut être complétée en une base de E.
Les vecteurs peuvent être choisis dans une même famille génératrice finie.

Caractérisation des bases
Si $\dim(E) = n \geqslant 1$, et $\mathscr{F}$ une famille de n **vecteurs** de E,
alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathscr{F}$ est une base de E,
2. $\mathscr{F}$ est génératrice de E,
3. $\mathscr{F}$ est libre.

Sous-espaces vectoriels
Si F est un sous espace vectoriel de E,

$$F \subset E \Rightarrow \dim F \leqslant \dim E.$$

et $\dim E = \dim F \iff E = F$.

Produit cartésien

$$\dim \prod_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i \qquad \dim E^n = n \dim E.$$

Somme

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F\cap G \qquad \text{(Grassmann)}.$$

$$\dim \sum_{i=1}^{n} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i.$$

On a égalité si, et seulement si la somme est directe.
Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i \iff \dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i.$$

Espaces supplémentaires : F et G supplémentaires dans E

- si, et seulement si $F \oplus G = E$.
- si, et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$, avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.
- si, et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

En dimension finie, tout sous-espace admet (au moins) un supplémentaire, et tous les supplémentaires d'un même espace ont même dimension.
→ penser aux bases adaptées.

Approche matricielle dans $\mathbf{K}^n$

Famille de vecteurs de $\mathbf{K}^n$	**Matrice des vecteurs colonne**
rang de la famille	nombre de pivots.
libre	autant de pivots que de **colonnes**.
génératrice de $\mathbf{K}^n$	autant de pivots que de **lignes**.
base de $\mathbf{K}^n$	autant de pivots que de **ligne** et de **colonnes**.