Dérivabilité

- f est **dérivable** en a
  - si son taux d'accroissement admet une limite finie en a.
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
  - *ou* si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a :
$$\exists \lambda \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)\,\varepsilon_a(x)$$
    avec ε_a une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_a(x) = 0$.
    Dans ce cas, $\lambda = f'(a)$.
- f est **dérivable à gauche** en a
  - si son taux d'accroissement admet une limite finie à gauche a.
  - *ou* si f admet un **développement limité à l'ordre 1** à gauche en a.

$$\boxed{\text{Dérivable à gauche + dérivable à droite} \Rightarrow \left(\text{dérivable au point ssi } f'_g(a) = f'_d(a)\right).}$$

$$\text{Dérivable à gauche + dérivable à droite} \Rightarrow (\text{continue au point}).$$

- **Tangente :** $\quad T(x) = f'(a)(x-a) + f(a).$

Dérivée k-ième : On note $f^{(k)}(a)$ la dérivée k-ième de f en a, et on pose $f^{(0)} = f$.

$f \in \mathscr{D}^k(I)$, si f admet une dérivée k-ième en tout point de I.

$f \in \mathscr{C}^k(I)$, si f admet des dérivées k-ième sur I et si celles-ci sont continues.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

$f \in \mathscr{C}^\infty(I)$ si f est de classe $\mathscr{C}^k(I)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

$f \in \mathscr{C}^0(I)$ si f est de continue sur I.

Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ de I à valeurs dans J on note aussi $f \in \mathscr{C}^k(I, J)$.

(Leibniz) Si f et$g$ dérivables k-fois en a, alors fg aussi et
$$(fg)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}.$$

Extremum et point critique

Soit f définie sur I et dérivable en $a \in I$ **qui n'est pas une borne** de I.
Si f admet un extremum **local** en a, alors $f'(a) = 0$.

Théorème de Rolle

Si
- f est continue sur $[a, b]$ (*fermé*),
- f est dérivable sur $]a, b[$ (*ouvert*),
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ (ouvert) tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis

Si
- f est continue sur $[a, b]$ (*fermé*),
- f est dérivable sur $]a, b[$ (*ouvert*).

Alors il existe $c \in]a, b[$ (ouvert) tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Inégalité des accroissements finis

Si
- f est continue sur $[a, b]$ (*fermé*),
- f est dérivable sur $]a, b[$ (*ouvert*),
- $\exists m \leqslant M$ tels que $\forall x \in]a, b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$.

Alors, $\forall (x, y) \in ([a, b])^2$, tels que $x \leqslant y$,
$$m(y-x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant M(y-x).$$

Inégalité des accroissements finis - simplifiée

Si
- f est continue sur $[a, b]$ (*fermé*),
- f est dérivable sur $]a, b[$ (*ouvert*),
- $\exists k \geqslant 0$, tel que $\forall x \in]a, b[,\ |f'(x)| \leqslant k$.

Alors, $\quad \forall (x, y) \in ([a, b])^2, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x| \quad$ *(f est k-lipschitzienne).*

Théorème de la limite de la dérivée

Si
- f est continue sur I (*fermé*),
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$,
- $\exists \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, tel que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$,

alors, $\quad \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$