Applications linéaires

Nota : Dans cette fiche, $\star$ désigne les propriétés spécifiques à la dimension finie.

Définition :

$$u \in \mathscr{L}(E,\, F) \iff \forall \lambda \in \mathbf{K},\ \ \forall (x,y) \in E^2,\ u\,(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y).$$

$(\mathscr{L}(E,\, F),\, +,\, \cdot)$ est un espace-vectoriel.
$(\mathscr{L}(E,\, F),\, +,\, \circ)$ est un anneau (non commutatif en général).
$(\mathrm{GL}(E),\, \circ)$ est un groupe.
Une application linéaire est caractérisée par ses restrictions sur une somme directe.
En particulier, elle est caractérisée par son action sur une base.

Image et noyau : L'image directe/réciproque par u d'un sous-espace vectoriel de E est un sous espace vectoriel de F.

$$\mathrm{Im}\,(u) = u(E) \quad \text{et} \quad \ker(u) = u^{-1}\left(\{0_F\}\right).$$

Injectivité-surjectivité.

- u est injective
  - si, et seulement si $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0_E\}$.
  - si, et seulement si l'image par u d'une base de E est libre.
  - si, et seulement si l'image par u de toute famille libre de E est libre.
  - $\star$ si, et seulement si $\mathrm{rg}\,(u) = \dim E$.
- u est surjective
  - si et seulement si $\mathrm{Im}\,(u) = F$.
  - si, et seulement si l'image par u d'une base de E est génératrice de F.
  - si, et seulement si l'image par u de toute famille génératrice de E est génératrice de F.
  - $\star$ si, et seulement si $\mathrm{rg}\,(u) = \dim F$.
- u est surjective
  - si, et seulement si l'image par u d'une base de E est une base de F.
  - $\star$ si, et seulement si $\mathrm{rg}\,(u) = \dim E = \dim F$.

$\star$ En dimension finie, si $\dim E = \dim F$, alors

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective}.$$

$\star$ En dimension finie, u bijective si, et seulement si elle admet un inverse à gauche *ou* à droite.

Image d'une famille :
Si $u \in \mathscr{L}\,(E,\, F)$, et $(e_i)_i$ génératrice de E, alors $(u(e_i))_i$ génératrice de $u(E)$.
Rang : s'il est défini, $\mathrm{rg}\,(u) = \dim(\mathrm{Im}\,(u))$.
$\mathrm{rg}\,(v \circ u) \leqslant \min\left(\mathrm{rg}\, v,\, \mathrm{rg}\, u\right)$

$\mathrm{rg}\,(u) \leqslant \min\left(\dim E,\, \dim F\right).$
Le rang est invariant par composition avec un isomorphisme.
$\star$ **Théorème du rang :**
Si E de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E,\, F)$, alors

$$\dim\left(\ker(u)\right) + \mathrm{rg}\, u = \dim E.$$

Endomorphismes particuliers

- *homothétie :* $\lambda \mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbf{K}$.
  C'est un automorphisme si, et seulement si $\lambda \neq 0$.
  Les homothéties commutent entre-elles.
  Les homothéties non nulles forment un sous-groupe commutatif de $\mathrm{GL}(E)$.
- *projecteur :* sur F parallèlement à G, avec $F \oplus G = E$.
  $$p(x) = x_F.$$
  $x \in F \iff p(x) = x$.
  $F = \mathrm{Im}\,(p)$ et $G = \ker(p)$.
  Caractérisation : $p \circ p = p$.
- *symétrie :* par rapport à F parallèlement à G, avec $F \oplus G = E$.
  $$s(x) = x_F - x_G.$$
  $F = \ker(s - \mathrm{Id})$ et $G = \ker(s + id)$.
  Caractérisation : $s \circ s = \mathrm{Id}$.

S'ils ont même bas et direction, alors

$$p = \frac{1}{2}\,(s + \mathrm{Id}) \qquad \text{et} \qquad s = 2p - \mathrm{Id}.$$

Formes linéaires et hyperplans : L'ensemble des formes linéaires sur E est $E^* = \mathscr{L}(E,\, \mathbf{K})$.
Les *hyperplans* de E sont les noyaux des formes linéaires non nulles.
H est un hyperplan de E, si, et seulement s'il est en somme directe avec une droite de E.
$\star$ en dimension finie n, la dimension d'un hyperplan est $n - 1$.
Deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan si, et seulement si elles sont proportionnelles.